1 - Relever les erreurs

Addition : 358 + 274 = ?

								1					1	1					
	3	5	8		3	5	8	3	5	8		3	5	8		3	5	8
+	2	7	4	+	2	7	4	+ 2	7	4	+	2	7	4	+	2	7	4
	5	2	2		6	3	1	6	2	2		5	2	2		2	5	2	2

Addition à trous : 527 + ? = 708 et 527 + ? = 493

	5	2	7		5	2	7		5	2	7						3	5	8
+	2	8	1	+	2	0	1	+			1					+	2	7	4
	7	0	8		7	0	8		7	0	8						1	4	9	3
											Impossible								

Multiplication

	1	3				2	3												
	1	3	9			1	3	9			1	3	9						
x			4	x			4	x			4								
	5	5	7		1	2	4	6			5	2	6						

Soustraction

								1					1	1					
	6	3	8		6	3	8	6	3	8		6	3	8					
-	2	7	5	-	2	7	5	- 2	7	5	-	2	7	5					
	4	4	3		4	0	3	4	6	3				3					
											Impossible								

2 – Quelles hypothèses peut-on formuler sur les erreurs ?

3 – Quelles remédiations peut-on envisager ?

LES PROCESSUS DE LA DEMARCHE

1re étape: **FAIRE** *... quand l'impossible à compter peut être déjoué !*

Un tas d'allumettes (« 30 » en système décimal) est donné à chaque enfant avec, pour consigne:

« Imaginez que vous habitez dans un pays où on ne sait compter et écrire les nombres que jusqu'à quatre (compris). On l'appellera le PAYS DE QUATRE. Dans ce pays, vous avez un troupeau de moutons à vendre (ou à échanger). Pour cela, vous avez besoin de savoir combien il y en a. Cherchez que faire pour trouver combien vous avez de moutons. »

Des objets aux actions sur les objets : - où il devient nécessaire, pour s'en sortir, de faire des groupements.
- où, pour compter les objets, on en vient à compter leurs groupements.

2e étape: **DIRE** *... quand les actions deviennent objets de réflexion*

Où l'on cherche à dire ce qu'on a fait et à faire-refaire ce qu'on dit.
« Cherchez comment dire ce que vous avez fait. Ce qu'il y a maintenant dans votre champ.»

Trouver des mots pour qualifier les différents groupements qui se succèdent et s'aménagent entre eux.
Organisation par l'enseignant du va-et-vient entre actions et verbalisations (pour chaque élève et entre les élèves) : première phase de mise à distance réflexive et retour sur les procédures d'action introduites par les élèves.

3e étape: **FORMULER** *... quand les actions sont différenciées, coordonnées, socialisées*

« Après ce que vous avez fait, cherchez une phrase qui explique ce qui est le plus important pour savoir combien vous avez d'allumettes.»

- travail sur la formulation des différents groupements en vue de désigner l'ensemble de tout ce qui est compté.
- nécessité de groupements de même type – par 4 au pays de quatre– pour une efficacité plus grande de l'action.
- nécessité d'une dénomination commune pour les groupements choisis, pour faciliter de la communication.

Où, des actions menées, est dégagé, structuré et nommé ce qui demeure opératoire au travers de ce qui varie.

4e étape: **CODIFIER** *... inventer une écriture codifiée*

« Voilà qu'il arrive une maladie curieuse dans ce pays: les habitants ne savent plus écrire de mots. Ils ne savent écrire que les chiffres (jusqu'à 4 compris). Alors, comment faire pour qu'on comprenne le message ? »

Phase de travail dans le symbolique : passage des mots trouvés à l'invention de dessins/codages, confrontation et élaboration d'un codage commun.

5e étape: **ECRIRE UN NOMBRE AVEC DES CHIFFRES** *... peu de signes pour désigner beaucoup !*

« Une anomalie arrive encore: les gens ne savent même plus dessiner ! Ils ne savent écrire que des chiffres. »
Emergence de propositions multiples (couleurs, grandeurs, positions...) pour représenter les unités d'ordres différents. Confrontation et analyse qui introduit à l'écriture positionnelle.

6e étape: **LE ZÉRO** *... quand représenter « rien » devient indispensable !*

Comme réinvestissement créatif des acquis précédents.
« Maintenant que vous savez comment écrire ce que vous avez compté d'un tas d'objets, vous allez chercher à coder, au pays de quatre, les nombres suivants (donnés à partir du système décimal): « 18 », « 24 », « 6 ».

Où, pour écrire ce qui est compté et pour se comprendre, on doit inventer un signe, là où il y a un manque.

7e étape: **LA SUITE DES NOMBRES** *... quand le chiffre 4 en base quatre disparaît !*

« Individuellement, écrivez la suite des nombres, au pays de quatre. »
Ecriture en colonnes, de 1 en 1, jusqu'à un nombre de quatre chiffres (avec utilisation possible des allumettes)
Découverte de l'évacuation définitive du chiffre 4 et de l'importance du 0 dans l'écriture positionnelle.
Systématisation et réinvestissement dans d'autres bases.

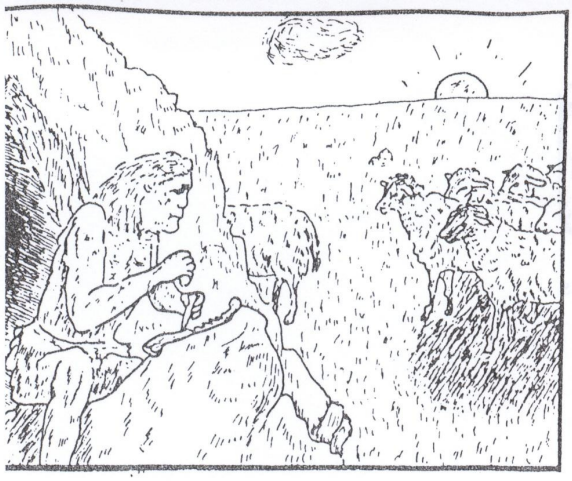
8ème étape : **LA NUMERATION DECIMALE** *... quand la numération décimale dévoile ses secrets!*

Réinvestissement des acquis précédents en base dix.

9ème étape: **VOCABULAIRE DE LA BASE DIX** *... quand le vocabulaire est plein d'histoire !*

Indications pour une progression en cohérence avec la construction conceptuelle et apports historiques pour comprendre les anomalies du vocabulaire.

Suivant les classes, les étapes de construction conceptuelle restent les mêmes mais le dispositif global s'adapte.



Alors, un jour, il a une idée... Il s'assoit à l'entrée de sa caverne et y fait pénétrer ses moutons un à un. A chaque fois qu'il en passe un devant lui, il fait une encoche dans un radius de loup qu'il a en sa possession (fig. 2). Et ainsi, sans en connaître la véritable signification arithmétique, il a réalisé, au passage du dernier animal, exactement cinquante-cinq encoches. Tous les soirs ensuite, en faisant rentrer ses moutons, également un à un, il place à chaque fois un doigt dans une encoche, en partant d'une extrémité du radius à l'autre. Et si son doigt parvient à la dernière, notre berger se sent alors rassuré, car tous ses moutons sont désormais à l'abri.

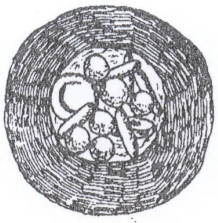
Radius de loup (il y a près de 30 000 ans) muni d'encoches réparties en 2 séries de groupes de 5 (découvert en 1937 en Tchécoslovaquie)[30]. Le groupement de 5 en 5 peut-il avoir pour hypothèse la référence aux doigts de la main ?

Poinçon en bois de renne (il y a environ 15 000 ans av. J.-C., trouvé en Dordogne) portant des entailles.

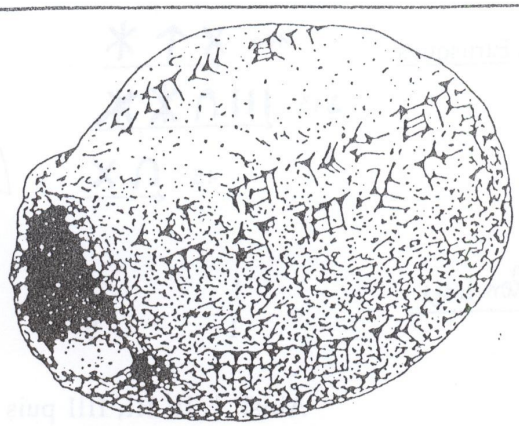
Entailles de 5 en 5 (avant l'écriture romaine).

Des *calculi*, des traces dans l'argile, des signes différents sont répétés suivant les groupements qu'ils représentent :

calculi : golfe arabo-persique (Irak et Iran actuels, vers 3 500 av. J.-C.) représentent un type de groupement suivant la forme donnée à l'argile.



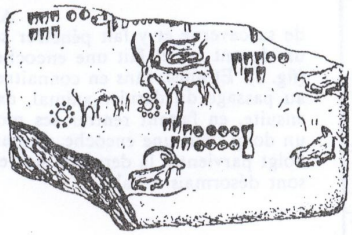
Une bulle (boule creuse d'argile séchée) contenant des *calculi* pour garder la mémoire du nombre.



Objets concernant des moutons et des chèvres
21 brebis qui ont déjà eu des petits ;
6 agneaux femelles ;
8 béliers adultes ;
4 agneaux mâles ;
6 chèvres qui ont déjà eu des petits ;
1 bouc;
[2] chevrettes.

Cette "boîte", est vieille de 8 700 ans. Chaque animal du troupeau est représenté par un signe particulier.

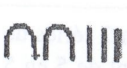
Tablettes sumériennes (Suse, environ 3 000 av. J.-C.) où *calculi* et bulle ont laissé place à des encoches sur des tablettes, 1ers signes pictographiques d'une écriture numérique naissante, avant l'écriture cunéiforme (avec dessin des animaux comptés).



Écriture cunéiforme des Babyloniens (environ 2 000 av. J.-C.) : nombre 23.

3 unités et 2 unités de dix : l'unité

et le paquet de dix :



Écriture égyptienne (environ 2 350 ans av. J.-C.) : nombre 23.

3 unités et 2 unité de dix : l'unité

et le paquet de dix :

Écriture maya (environ de 300 à 800 av. J.-C.) : nombre 7

• pour 1 pour 5

Les Incas (Chili, Pérou, Bolivie) utilisaient des cordes avec des nœuds:

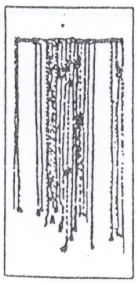


Fig. 46. – Un quipu péruvien.

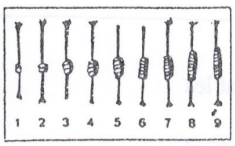


Fig. 47. – Représentation des neuf unités sur une cordelette, par la méthode du quipu inca.

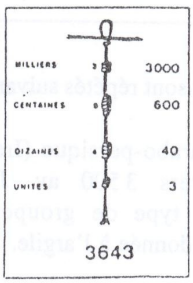
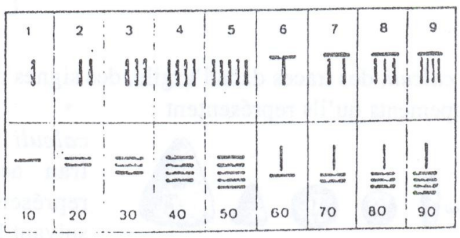
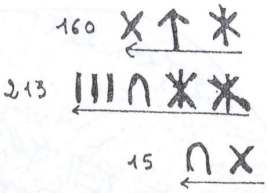


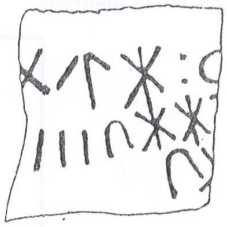
Fig. 48. – Représentation sur une ficelle du nombre 3643 par la méthode du quipu péruvien.

Les Chinois inventaient cette écriture:



Les Etrusques





Les Romains

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Ainsi: I, II, III, IIII puis IV, V, VI, VII, VIII, VIIII puis IX, X, XI, XII, XIII, XIIII, XV XVI, XVII, XVIII, XVIIII, XX, ...

Mais effectuer des opérations avec ces chiffres n'est pas chose facile! Pour s'en convaincre essayez d'effectuer cette addition:

CCLXVI + MDCCCVII + DCL + MLXXX + MMMDCCCIII = ?

Petite histoire du « zéro »

- Le « zéro » est de l'ordre d'une énigme qui, pendant des millénaires, a été refusé comme « existant ». Il n'a pas été inventé dans toutes les civilisations et n'est arrivé que très tard dans nos pays européens.
- Malgré leur grandeur les civilisations égyptiennes, grecques et romaines n'utilisaient pas ce chiffre car exprimer le manque n'était pas considéré comme important, comme utile. Plus encore il était, dans de nombreuses traditions, interdit lorsque les représentations du vide étaient assimilées à l'obscurité, au chaos, au désordre… la création étant assimilée à la lumière. Bref le « zéro » était d'essence diabolique. Pour les Grecs «*rien ne peut être créé de rien* » (Lucrèce) et « *la nature a horreur du vide* » (Aristote).
- Une des conséquences de ce refus du zéro subsiste aujourd'hui : notre calendrier grégorien, ne comportant pas d'année « 0 », nous avons fêté à tort le début du 3ème millénaire le 31 décembre 1999 au lieu de le faire le 31 décembre 2000 !
- Où est né le « 0 » ? Comment est-il arrivé jusqu'à nous ?

* La légende (?) raconte qu'à Bagdad, où fut créée la « Maison de la Sagesse », à l'un des plus hauts moments de la civilisation arabe, vers l'an 800, et alors que le calife An-Ma'mun venait de remporter une victoire sur les armées byzantines, il proposa un étonnant échange à l'empereur d'Orient : les prisonniers contre des livres. Le marché fut conclu : un millier de guerriers chrétiens libérés regagnèrent Constantinople, tandis qu'en sens inverse une dizaine d'ouvrages rarissimes arrivaient à Bagdad, accueillis dans la « Maison de la Sagesse ». Parmi ces livres, l'un d'eux, le *Siddhantha*, écrit par Brahmagupta (mathématicien indien), tenait dans ses pages *« dix petites figures : les dix chiffres, y compris le zéro, avec lesquels nous calculons ! »*[4]

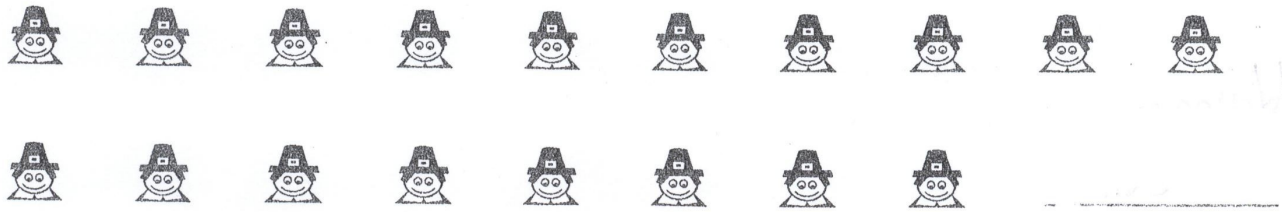
* La plus ancienne mention connue des chiffres en Europe date de 976 (manuscrit espagnol) et comporte les 9 chiffres « indo-arabes » (9 – 8 - ……- 1). Juste avant « l'An mil », Gerbert d'Aurillac (qui devint Pape) fait entrer en France ces 9 chiffres. On raconte que pendant longtemps il fut tenu pour suspect « d'avoir goûté à la science des infidèles Sarrazins et avait sûrement dû vendre son âme à Lucifer… au point qu'en 1648 l'autorité pontificale jugea nécessaire de faire ouvrir son tombeau pour vérifier si les diables de l'Enfer ne l'habitaient pas encore !...

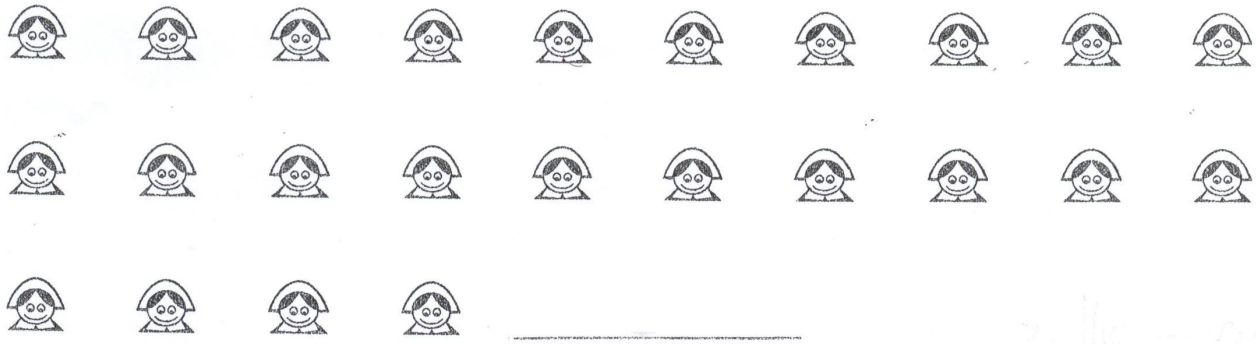
* Dans les pays d'Orient le zéro figurait comme point puis petit cercle (signifiant « vide » en sanskrit). Ce n'est qu'au 12ème - 13ème siècle que le zéro fut introduit en Italie (par Fibonacci) et seulement en 1479 qu'on le trouve imprimé à Venise, puis en France sous la forme : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

Ce zéro qui s'appelait d'abord *« çunya »* (« vide » en sanskrit) devint *« sifr »* dans la traduction arabe, puis *« zéphirum »* et enfin *« zéro »*dans la traduction latine. Ce « rien qui peut tout » fit que le mot arabe *« sifr »* devint *« chiffre »* pour désigner plus généralement tous les chiffres de notre numération !

---

[4] Voir livre de GUEDJ D. Le théorème du perroquet – Le Seuil – 1998 – p. 221





APPLICATIONS DU CONCEPT DE NUMÉRATION

Pour renforcer/intérioriser ce concept de numération positionnelle

Dictée de nombres :

- Inscrire dans un tableau donné par l'enseignant:

c	d	u		c	d	u		m	c	d	u		m	c	d	u	

- Puis les élèves s'émancipent de ce tableau. Possibilité pour certains de continuer à écrire sur leur cahier (un chiffre par carreau) : C D U et d'inscrire le nombre dicté en dessous.

Chiffres et nombres :

- Liste des chiffres sur affiche : 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 et 0
- Travail sur la différence chiffre et nombre (7 peut n'être qu'un chiffre : 377 ou être un nombre : 7)
- Entourer le chiffre des unités ou dizaines ou... dans : 375 - 24 - 1278 - 8 - 452780 - etc.
- Entourer le nombre des unités ou dizaines ou ... dans un nombre donné (pour certains, nécessité de revenir au tableau de numération affiché en classe pour constater qu'il n'y a pas de dizaine dans les unités mais qu'il y a des paquets de « dix » dans les centaines, les milliers, etc. et que donc il y a 756 paquets de « dix » dans 7651)

Qui suis-je ? ou le nombre inconnu :

J'ai 3 centaines, 5 unités et 4 dizaines : je suis _____
J'ai 5 dizaines et 6 centaines. Je suis _____
Puis j'ai 1 centaine, 15 dizaines et 34 unités. Je suis ___ (cycle 3)
Inciter les élèves fragiles à utiliser un tableau C D U

Classer par ordre croissant / décroissant :

Pour ceux qui ont des difficultés inscrire au dessus de chaque nombre C D U

Comparer des nombres :

- Pour ceux qui ont des difficultés inscrire au dessus de chaque nombre C D U
- Un couple de nombres : 352 – 325 : « entourer le plus grand »
- Introduction de la flèche « Est plus grand que » (matérialisation). Ainsi 34 → 25 et 18 ← 24

Les élèves, au bout d'un temps (variable pour les uns et les autres) ne gardent plus que le « bout » de la flèche : 34 > 25 et 18 < 24

- Comparaison d'écritures : 200 + 40 + 7 --?-- 427 -- ?--400 + 70 + 2

Avant / après

- Inscrire des nombres (donnés) dans une chaîne partiellement donnée.
- Travailler spécifiquement les « passages » d'un groupement à un autre (nombre qui vient avant 100 ou après 399)
- Rechercher le nombre qui vient avant/après et qui se termine par 0 (ou 1...)

Décomposition additive puis multiplicative :

Dans 835, 8 n'est pas 8 et 3 n'est pas 3 mais 5 est bien 5 ! Pourquoi ?

→ il y a 8 paquets de « cent » (100 X8), 3 paquets de « dix » (10 X 3) et 5 « seuls » (1 X 5)
Donc je peux écrire : 835 = 8 C + 3 D + 5 U ou 800 + 30 + 5 ou (100 X 8) + (10 X 3) + (1 X 5)

Suites de nombres :

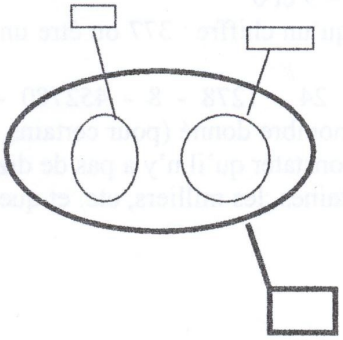
Ex : 47 – 49 – 51 - ? - ?
Quelles constatations ? (1) les nombres augmentent – 2) ils augmentent de 2 unités)
Ex : 78 – 88 – 98 - ? - ?
Le chiffre des unités reste le même et seul change le chiffre des dizaines (=> 10u = 1d)

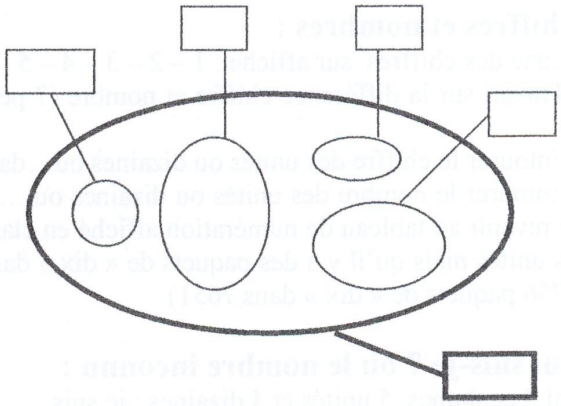
Opérations :

1) Un travail sur la schématisation de problèmes sera préalable
2) Chaque opération sera <u>toujours</u> inscrite dans un tableau C D U
3) Pour chaque nouvelle opération la démarche sera identique : FAIRE (sur des objets puis sur du représenté) – DIRE (le faire) – FORMULER – CODIFIER (cf démarche « numération » proposée par Odette Bassis)

<u>addition</u>

1) Problèmes à schématiser





2) Un élève a à sa disposition x allumettes et un autre y allumettes : après un travail de groupement effectué par chacun (en base Z) et l'écriture du nombre d'allumettes, mise en commun des deux quantités. Dans certains cas il y aura nécessité de constituer de nouveaux groupement → les faire puis dire ce qui a été fait puis formuler (ex : transformation de 15 unités en 1 paquet de 10 unités et 5 unités) **<u>NB :</u> interdiction de dire le mot « retenue » !**

3) Passage au FAIRE sur une fiche (radis) : travail sur les objets représentés (effectuer des groupements puis indiquer le nombre obtenu pour chaque quantité représentée dans le tableau « opération »). Ensuite rassembler les quantités et <u>rendre compte</u> (formuler puis codifier) des opérations effectuées (nouveaux groupements), avec un crayon d'une autre couleur, dans le tableau « opération »

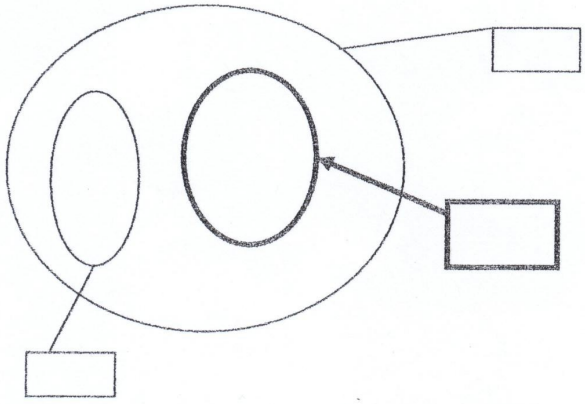
```
   C   D   U
       +1
   1   3   6
+      2   5
-----------------
   1   6   1
           (11)
```

4) Petit à petit les élèves s'émanciperont du faire (pas tous en même temps) pour passer directement à la codification. Il est nécessaire, lors des temps de « correction » de continuer à travailler la formulation : 6 u + 5 u = 11 u soit un paquet de « dix » (qui va s'ajouter aux dizaines) et une unité.

5) Il est indispensable, très tôt, d'introduire des groupements supérieurs à 1 afin que les élèves ne confondent pas « la retenue » à 1 !!!

addition à trous : démarche identique

1) énoncé de problèmes – schématisation – ce que l'on pourrait chercher ? (manque)



2) effectuer des opérations qui ne mettent pas en jeu des groupements : ex 32 + ? = 67

3) aborder des opérations type 56 + ? = 72 et faire découvrir qu'elle est à la fois possible ET impossible. Faire formuler pour découvrir que le « résultat » est NECESSAIREMENT plus grand que le nombre donné . (D'où la nécessité de proposer, en parallèle, des opérations impossibles !)

Possible car il me faut, et je peux, ajouter à 56 pour obtenir 72 mais impossible car je ne peux ajouter un nombre à 6 pour obtenir 2 !

Donc « 2 » est un « nombre masqué ». Il ne peut être 2 (puisque inférieur à 6) et il doit être supérieur à 6. Quels sont les nombres supérieurs à 6 (en établir la liste) ? Donc 12 !

Ne pas oublier d'indiquer le groupement (+1) dizaine !

	C	D	U
		+1	
		5	6
+		?	?
		7	2
			(12)

multiplication à 1 chiffre

1) énoncé de problèmes – schématisation – ce que l'on pourrait chercher ?

Découverte que le schéma de la multiplication est semblable à celui de l'addition... mais qu'il s'agit toujours d'une même quantité !

2) La multiplication est une addition réitérée

3) Problème d'écriture lié à l'histoire de notre numération (introduite par les arabes) :

7 + 7 + 7 c'est 3 fois 7 mais nous écrivons 7 multiplié par 3 (7 X 3)

N.B. : s'il est vrai que nous avons le même nombre de sardines pour 4 boîtes de sardines que pour 7 boîtes de 4 sardines il n'en reste pas moins qu'il est différent d'acheter des boîtes de 7 sardines et de 4 sardines. Tout dépend du nombre de convives !

4) Pour la technique opératoire, procéder par étapes :
a - associer addition et multiplication en mettant sous forme multiplicative une addition donnée puis en vérifiant le résultat obtenu en effectuant l'addition

```
  24 + 24 + 24
   C  D  U
      ?  ?
X        ?
----------------
      ?  ?
```

```
vérification
   C  D  U
      2  4
+     2  4
+     2  4
-------------
   ?  ?  ?
```

b - **travailler sur les erreurs dues à la position de la « retenue »** (terme toujours interdit en classe !) : 4u X 3 = 12u . Reste 2 unités et 1 dizaine (disposée dans la colonne des dizaines, au-dessus du chiffre 2).
(2 +1) X 3 ou (2 X 3) + 1. La vérification par l'addition tranchera : y a-t-il 3 fois 3 dizaines (donc 9) ou 3 fois 2 dizaines + 1 dizaine (donc 7) ?
Décision sera prise d'indiquer la(les) « retenue(s) » SOUS le résultat de l'opération afin d'éviter les erreurs :

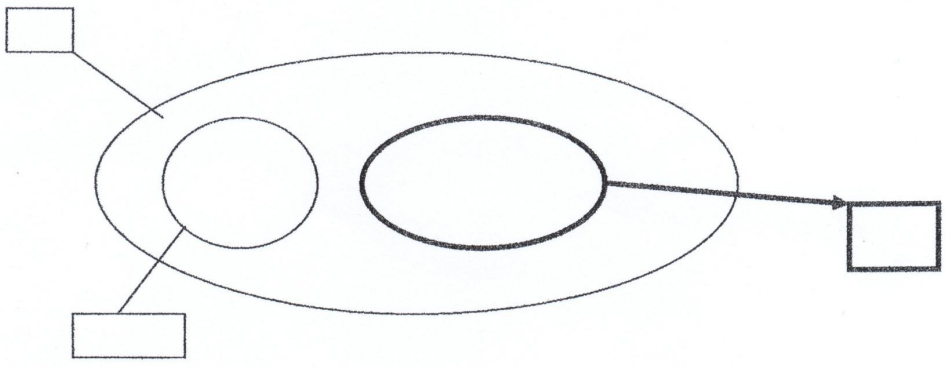
```
   C  D  U
      2  4
X        3
----------------
      7  2
     +1 (12)
```

Cette solution au problème devra être remise en cause pour les multiplications par un nombre de 2 ou 3 chiffres au multiplicateur.

6) En parallèle, réinvention de la table de Pythagore (voir article)
7) Pratique systématique, avec thermomètre des réussites (expliciter – donner exemple), du calcul rapide qui donne sens à **connaître les tables d'addition et de multiplication <u>sans les apprendre !</u>**

<u>Soustraction</u> :

1) énoncé de problèmes – schématisation – ce que l'on pourrait chercher ? (reste puis comparaison – cf livre de O. Bassis))



2) Après avoir exploré des soustractions du type 25 – 13 ou 38 – 18 puis 25 – 54 qui distinguent le « possible » de l' »impossible » nous proposons une opération à la fois possible et impossible (par exemple 35 – 17). Possible parce que l'on peut ôter 17 à 35 mais impossible car on ne peut retirer 7 unités à 5 unités … (cf additions à trous)
Faire NOMMER (formuler) où est le problème (ici, manque d'unités)

3) Retour au FAIRE puis au DIRE et au FORMULER : la soustraction est possible à condition que …

4) Effectuer un retour sur l'addition où avait été établi que 10 (u ou d) = 1 (d ou c) : Lorsqu'il y avait un grand nombre d'unités (ou de dizaines) nous étions amenés à fabriquer des « paquets » de dix unités (ou de dix dizaines) pour les transformer en 1 dizaine (ou 1 centaine).
La question est donc de savoir OÙ trouver les unités (ou les dizaines) qui nous « manquent » pour pouvoir effectuer notre soustraction « possible-impossible »
Et si nous opérions l'opération inverse : 1 dizaine = 10 unités (10 dizaines = 1 centaine) ?

	C	D	U
		2	**+10**
		~~3~~	5
+		1	7
		?	?

5) Avec vérification par l'addition où chacun pourra vérifier que ? ? + 17 = 35 !

6) Lorsque cette manière est parfaitement maîtrisée et que les élèves ont compris qu'ils avaient 2 « outils » pour résoudre les problèmes posés (cf 1°) : **la soustraction PAR ECHANGE** et l'addition à trou, leur proposer un troisième outil : **la soustraction PAR AJOUT(S)** .
Dans ce cas il ne peut y avoir détour par le FAIRE puisque nous allons devoir mettre en œuvre une propriété du concept de numération…..
Expliciter les étapes de la démarche :
a/ si nous ne pouvons plus échanger une dizaine contre des unités alors nous sommes condamnés à ajouter 10 au chiffre des unités (parce que nous sommes au pays des « dix » !)
b/ Mais si nous ajoutons 10 unités aux 5 unités de 35 la différence entre 35 et 17 se modifie puisque 35 – 17 n'est pas équivalent à (3d + 15u – 17) !
Ce point mérite d'être théâtralisé (par ex : différence de taille entre 2 élèves mesurées par une bande de papier puis l'un des élèves monte sur l'estrade…)
c/ Il faut donc ajouter le même nombre au nombre à soustraire !
d/ Mais alors nous nous retrouvons devant le même type d'impasse puisqu'il nous faut retrancher1d et 17 u à 3d et 15 u or je ne peux retirer 17u à 15u
e/ Retour au tableau de conversion travaillé pour l'addition : 10u→ 1d et 10d → 1c
Nous pourrions également écrire : 10u ← 1d et 10d ← 1c
f/ Il ne faut pas donner le même nombre aux deux nombres mais un nombre équivalent ! (puisque 10 = 1 et que 1 = 10)